# Correction Devoir maison n°7

## Exercice I

*On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :*

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$$

### Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. On effectue

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -6X^2 & +11X & -6 & X-1 \\ \cline{5-5}
-(X^3 & -X^2) & & & X^2 - 5X + 6 \\ \cline{1-2}
 & -5X^2 & +11X & -6 & \\
 & -(-5X^2 & +5X) & & \\ \cline{2-3}
 & & 6X & -6 & \\
 & & -(6X & -6) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

2. D'après la question précédente, $P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$. On étudie alors le polynôme $X^2 - 5X + 6$. Son discriminant est $\Delta = 25 - 24 = 1$. On a alors deux racines

$$X = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X = \frac{5+1}{2} = 3$$

Le polynôme P se factorise alors

$$\boxed{P(X) = (X-1)(X-2)(X-3).}$$

3. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6)}{e^x} \\
\iff & \frac{2P(e^x)}{e^x} = 2\frac{e^{3x}}{e^x} - 12\frac{e^{2x}}{e^x} + 22\frac{e^x}{e^x} - \frac{12}{e^x} \\
\iff & \frac{2P(e^x)}{e^x} = 2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}
\end{aligned}$$

Deuxièmement, en utilisant la forme factorisée du polynôme $P$, on a

$$\frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}.$$

On a donc l'égalité :

$$\boxed{2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}}$$

4. On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on étudie donc les 3 autres expressions.

$$\begin{aligned} & e^x - 1 > 0 \\ \iff & e^x > 1 \\ \iff & x > 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & e^x - 2 > 0 \\ \iff & e^x > 2 \\ \iff & x > \ln(2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & e^x - 3 > 0 \\ \iff & e^x > 3 \\ \iff & x > \ln(3) \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ | | $\ln(3)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $e^x - 2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $e^x - 3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

1. Étude de $v$.
   (a) On calcule

$$\begin{aligned} v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\ &= 2^2 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\ &= 22\ln(2) - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\ &= 3^2 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\ &= 22\ln(3) - 23 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } v(\ln(2) = 22\ln(2) - 14 \text{ et } v(\ln(3)) = 22\ln(3) - 23.}$$

   (b) On a

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{2x}\left(1 - 12\frac{e^x}{e^{2x}} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right) \\ &= e^{2x}\left(1 - 12e^{-x} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12e^{-3x}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty}$$

On a également

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}} - 12\frac{e^{x}}{e^{-x}} + 22\frac{x}{e^{-x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) \\ &= e^{-x}\left(e^{x} - 12e^{2x} + 22xe^{x} + 12\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty}$$

(c) La fonction $v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 22 - 12e^{-x}$$

En utilisant les questions précédentes et $v(0) = 1$, on trace le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ | | $\ln(3)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $v'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $v$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $\approx 1.25$ | ↘ | $\approx 1.17$ | ↗ | $+\infty$ |

(d) D'après le tableau de variation précédent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) > 0.}$$

2. Comme pour tout réel $x$, $v(x) > 0$,

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } h \text{ est } \mathbb{R}.}$$

3. La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de la fonction $v$ (qui ne s'annule pas). On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Comme $v^2(x)$ est strictement positif, la dérivée de $h$ est du signe contraire de la dérivée de $v$. Enfin, on a

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{v(x)} = 0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{v(x)} = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln(2)$ | | $\ln(3)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $v'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $h$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $\approx 0.80$ | ↗ | $\approx 0.86$ | ↘ | $0$ |

# Exercice II - Obligatoire pour les groupes 2 à 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 2$ ou $-2$. $\boxed{\text{Conclusion : } \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\cdot}$

2. — L'ensemble de définition de $f$ est symétrique par rapport à zéro : si $x \neq -2$ ou $x \neq 2$, il en est de même pour $-x$.
   — Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a :
$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$$

   $\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est paire.}}$

3. 
```
function y=f(x)
y=x^2/(x^2-4);
endfunction

x=2.01:0.01:10;
y=feval(x,f);
plot(x,y);
```
   Attention au fait que $f$ n'est pas définie en $x = 2$ : c'est pour cela que la première abscisse calculée dans le programme précédent est 2.01.

4. Soit $x \in ]2, +\infty[$. Raisonnons par équivalences :
$$\begin{aligned} f(x) > 1 &\iff \frac{x^2}{x^2-4} > 1 \\ &\iff \frac{x^2}{x^2-4} - 1 > 0 \\ &\iff \frac{x^2 - (x^2-4)}{x^2-4} > 0 \\ &\iff \frac{4}{x^2-4} > 0 \end{aligned}$$

   Cette dernière inégalité est clairement vraie donc la première l'est aussi.

$$\boxed{\text{Conclusion : pour tout réel } x > 2,\ f(x) > 1.}$$

5. Soit $y \in ]1, +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in ]2, +\infty[$ :
$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x^2}{x^2-4} = y \\ &\iff x^2 = y(x^2-4) \\ &\iff x^2 = yx^2 - 4y \\ &\iff x^2 - yx^2 = -4y \\ &\iff x^2(1-y) = -4y \\ &\iff x^2 = \frac{-4y}{1-y} = \frac{4y}{y-1} \quad (y \neq 1) \\ &\iff x = \sqrt{\frac{4y}{y-1}} \qquad \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

Vérifions que $x \in ]2,+\infty[$ en raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{4y}{y-1}} > 2 &\iff \frac{4y}{y-1} > 4 && (\text{stricte croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+)\\ &\iff 4y > 4(y-1) && (y-1>0)\\ &\iff 0 > -4\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi.

Pour tout $y \in ]1,+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in ]2,+\infty[$ admet une unique solution définie par :

$$x = \sqrt{\frac{4y}{y-1}}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est bijective de } ]2,+\infty[ \text{ sur } ]1,+\infty[ \text{ et on a } \begin{array}{rccc} f^{-1} & : & ]1,+\infty[ & \longrightarrow & ]2,+\infty[ \\ & & y & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{4y}{y-1}} \end{array}}$$

# Exercice III - Obligatoire pour les groupes 1 à 5

On définit pour tout entier naturel $n$ non nul, le polynôme $P_n$ par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3(n+1)X^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$P_{n+1}(0) = 0 + (2-0)P_n(0) = 2P_n(0)$$

   La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2. On a alors

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}}$$

   (b) On a $P_0'(X) = 0$ et donc

   $$\begin{aligned}P_1(X) &= X^3 \times P_0'(X) + (2-3X^2)P_0(X)\\ &= 2 \times (2 - 3X^2)\end{aligned}$$

   $$\boxed{P_1(X) = 4 - 6X^2.}$$

   En utilisant la méthode du discriminant, ou par calcul direct, on obtient,

   $$\boxed{\text{Les racines de } P_1 \text{ sont } \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } -\sqrt{\frac{2}{3}}.}$$

   (c) On a $P_1'(X) = -12X$ et donc

   $$\begin{aligned}P_2(X) &= X^3P_1'(X) + (2-6X^2)P_1(X)\\ &= -12X^4 + (2-6X^2)(4-6X^2)\\ &= -12X^4 + 8 - 12X^2 - 24X^2 + 36X^4\\ &= 24X^4 - 36X^2 + 8\end{aligned}$$

Afin de déterminer ses racines, on va poser $Y = X^2$, On a

$$24X^4 - 36X^2 + 8 = 4(6Y^2 - 9Y + 2)$$

On étudie les racines de $6Y^2 - 9Y + 2$. Le discriminant est $\Delta = 81 - 48 = 33$ et donc les racines sont

$$Y_1 = \frac{9+\sqrt{33}}{12}, \qquad Y_2 = \frac{9-\sqrt{33}}{12}$$

Comme $9 - \sqrt{33} > 0$, on a quatre racines pour $P_2$,

$$\boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, \quad -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, \quad \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}} \text{ et } -\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}}$$

(d) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n$ : $\{\mathscr{P}_n$ est de degré $2n\}$.

— **Initialisation :** $P_0$ est de degré 0 donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang $n$. On a donc $\mathscr{P}_n$ un polynôme de degré $2n$.

  — $P_n'$ est de degré $2n-1$ et donc $X^3 P_n'$ est de degré $2n+2$.

  — $P_n$ est de degré $2n$ et $(2 - 3(n+1)X^2)$ est de degré 2 donc $(2 - 3(n+1)X^2)P_n(X)$ est de degré $2n+2$

  $P_{n+1}$ étant la somme de deux polynôme de degré $2n+2$, c'est un polynôme de degré au moins $2n+2$. On s'intéresse à son coefficient dominant. Si on note $a_n$ le coefficient dominant du polynôme $\mathscr{P}_n$ alors

$$a_{n+1} = 2na_n - 3(n+1)a_n = -(n+3)a_n \neq 0$$

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ Le polynôme } \mathscr{P}_n \text{ est de degré } 2n.}$

2. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$

(a) La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \frac{-6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

De même, $f'$ est dérivable en tant que produit, composée et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) &= \frac{-12x \times x^6 - 6x^5(-6x^2+4)}{x^{12}}e^{-1/x^2} + \frac{-6x^2+4}{x^6} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-12x^4 - 6x^2(-6x^2+4)}{x^9}e^{-1/x^2} + \frac{-12x^2+8}{x^9}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-12x^4 + 36x^4 - 24x^2 - 12x^2 + 8)}{x^9}e^{-1/x^2}\\ &= \frac{24x^4 - 36x^2 + 8}{x^9}e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a finalement } f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6}e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9}e^{-1/x^2}}$$

(b) On calcule les limites,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} 2y^{3/2}e^{-y} = 0 \quad \text{(par croissance comparée)}$$

D'après les questions précédentes, on déduit

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$ | $\nearrow$ | $0$ \|\| $0$ | $\nearrow$ | $2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$ | $\searrow$ | $0$ |

(c) On détermine la convexité en regardant le signe de $f''$. D'après la question 1.c

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$ | | $\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$ | | $\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

La fonction est donc convexe sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}\right[$, sur $\left]-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}, 0\right[$, sur $\left]0, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}\right[$ et sur $\left]\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, +\infty\right[$. Elle est concave sur les autres intervalles.

(d) On conjecture

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}.}$$

(e) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}\right\}$.

— **Initialisation :** $f^{(0)} = f$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{P_0(x)}{x^{3(0+1)}}e^{-1/x^2}$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang $n$. On a donc la formule pour la dérivée $n$ème de $f$. $f^{(n)}$ est alors dérivable en tant que composée, produit et quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)x^{3(n+1)} - 3(n+1)x^{3n+2}P_n(x)}{x^{6n+6}}e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n+3}} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \\ &\textit{On simplifie le premier quotient par } x^{3n} \\ &= \frac{P_n'(x)x^3 - 3(n+1)x^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+6}}e^{-1/x^2} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+2)}}e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}.}$

3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.
   (a) La matrice $[1, 0, 2, 4]$ correspond au polynôme $\boxed{1 + 2X^2 + 4X^3}$
   (b) La matrice correspondant à $\boxed{P_1(X) \text{ est } [4, 0, -6]}$.
   La matrice correspondant à $\boxed{P_2(X) \text{ est } [8, 0, -36, 0, 24]}$.
   (c) La matrice sera de $\boxed{\text{taille } n + 1}$
   (d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.0.]
    else
        Q = zeros(1,.n-1.)
        for k = 1 : .n-1.
            Q(k) = .k*P(k+1).
        end
    end
endfunction
```

# Exercice IV - Obligatoire pour le groupe 1

On désigne par $n$ un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$que l'on note $(E_n)$. A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier $n$, $(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0$

1. Etude des racines positives des équations $(E_1)$ et $(E_2)$
   (a) On étudie les variations de $f_1$. On a

$$f_1(x) = 1 - xe^{-x}.$$

La fonction $f_1$ est de classe $C^1$ sur $[0; +\infty[$. On calcule alors

$$\forall x \in [0; +\infty[, f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x - 1)e^{-x}$$

On calcule la limite de la fonction $f_1$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - xe^{-x} = 1$$

par croissance comparée.
La courbe représentative de $f$ a donc une asymptote horizontale en $+\infty$
On a donc le tableau de variation

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f_1'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Variations de $f_1$ | $1$ ↘ | $\frac{e-1}{e}$ | ↗ $1$ |

On a

$$f_2(x) = 1 - x^2 e^{-x}.$$

La fonction $f_2$ est de classe $C^1$ sur $[0;+\infty[$. On calcule alors

$$\forall x \in [0;+\infty[, f_2'(x) == -2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$$

On calcule la limite de la fonction $f_1$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^2 e^{-x} = 1$$

par croissance comparée.
La courbe représentative de $f_2$ a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

| $x$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f_2'(x)$ | $0$ $-$ | $0$ | $+$ |
| Variations de $f_2$ | $1$ ↘ | $1-\frac{4}{e^2}$ | ↗ $1$ |

Sur la courbe représentative de $f_1$, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et la tangente de pente $-1$ en 0.
Sur la courbe représentative de $f_2$, on place l'asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la tangente horizontale en 1 et en 0

(b) $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de $f_1$ est $\dfrac{e-1}{e} > 0$ et l'équation n'a pas de solution positive

De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de $f_2$ est $\dfrac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car la fonction carré est strictement croisante sur $\mathbb{R}^+$ et que me et 4 en sont éléments ).et l'équation $(E_2)$ n'a pas de solution positive.

(c) Le programme scilab s'écrit

```
function y = f(x,n)
    y = 1 - x.^n .* exp(-x)
endfunction

X = 0:0.01:5
plot2d(X,f(X,1))
plot2d(X,f(X,2))
```

2. Etude des racines positives de l'équations $(E_3)$

   (a) On a
   $$f_3(x) = 1 - x^3e^{-x}.$$
   La fonction $f_3$ est de classe $C^1$ sur $[0;+\infty[$. On calcule alors
   $$\forall x \in [0;+\infty[, f_3'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$$
   On calcule la limite de la fonction $f_1$ en $+\infty$.
   $$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^3e^{-x} = 1$$
   par croissance comparée.
   La courbe représentative de $f_3$ a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_3'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f_3$ | $1$ | $\searrow$ | $1-\frac{27}{e^3}$ | $\nearrow$ | $1$ |

   Cette fois, comme $e^3 < 27$ alors $27/e^3 > 1$ et $1 - \dfrac{27}{e^3} < 0$.
   On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 > 0$ donc $f_3$ est strictement positive sur $[0,2]$
   Comme $f_3$ est continue et strictement décroissante, elle est bijective de $]2,3[$ dans $\left]1-\frac{27}{e^3}, 1-\frac{8}{e^2}\right[$.
   Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution $u$ sur cet intervalle. $(2 < u < 3)$
   De même comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, $(E_3)$ a une unique solution $v$ sur l'intervalle $]4,5[$ et n'en a aucune sur $[3,4]$ ni sur $[5,+\infty[$
   Donc l'équation $(E_3)$ admet deux racines positives $u$ et $v$ telles que$1 < 2 < u < 3 < 4 < v < 5$

   (b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale $y_0$,où $y_0$ est un nombre réel strictement supérieur à $u$.

   — $u < y_0 \leq v$, alors par récurernce :
     soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u < y_n \leq v$ comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors $3\ln(u) < 3\ln(y_n) \leq 3\ln(v)$
     Et comme $u$ et $v$ *sont* soutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a $3\ln(u) = u$ et $3\ln(v) = v$
     Donc $u < y_{n+1} \leq v$
     Et la propriété estvraie pour tout entier $n$.

   — De même par récurrence si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel $n$, $v \leq y_n$.

   — Signe ?
     $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_n > y_{n-1} \Leftrightarrow 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que $y_{n-1}$ et $y_n$ en sont éléments ; et finalement $y_n - y_{n-1} > 0 \Leftrightarrow y_{+1} - y_n > 0$.
     De même pour =0 et pour $< 0$; Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et par récurrence du même signe que $y_1 - y_0$

Donc si $y_0 < y_1$ alors pour tout entier $n$, $y_n < y_{n+1}$ et si $y_0 > y_1$ alors pour tout entier $n$, $y_n > y_{n+1}$

— Or pour $u < y_0 \leq v$ on a, d'après les variations de$f_0$ : $f_3(y_0) \leq 0$ donc $1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0$ donc $e^{y_0} < y_0^3$ et comme ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors $y_0 \leq 3\ln(y_0)$ et $y_0 \leq y_1$. Donc si $u < y_0 \leq v$ alors pour tout entier $n$ : $y_n \leq y_{n+1}$ et la suite sera donc croissante.

— De même si $y_0 \geq v$ alors $f_3(y_0) \geq 0$ et la suite sera décroissante

3. Étude des racines positives de l'équation $(E_n)$ pour $n \geq 3$.

(a) On a

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

La fonction $f_n$ est de classe $C^1$ sur $[0; +\infty[$. On calcule alors

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^n (x-n) e^{-x}$$

On calcule la limite de la fonction $f_n$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - x^n e^{-x} = 1$$

par croissance comparée.
La courbe représentative de $f_n$ a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f_3'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f_3$ | $1$ | $\searrow$ | $1 - \frac{n^n}{e^n}$ | $\nearrow$ | $1$ |

Cette fois, comme $n \geq 3 > e$ alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1^n$ car $n > 0$ et la fonction puissance $n$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
Donc $f_n(n) < 0$.
Comme $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, $f_n > 0$ sur $[0, 1]$ et $(E_n)$ n'a pas de solution.
Sur $]1, n[$, la fonction $f_n$ est continue et strictement décroissante. Elle est donc bijective de $]1, n[$ dans $]\lim_n f_n; \lim_1 f_n[$.
et comme $0 \in \left]f_n(n); 1 - \frac{1}{e}\right[$ l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution $u_n$ sur $]1, n[$.
De même sur l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution $v_n$.
Donc l'équation $(E_n)$ admet deux racines positives $u_n$ et $v_n$ telles que $1 < u_n < n < v_n$.

(b) Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on fait intervenir $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n - 1 \geq 3$ donc $n \geq 4$ :

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \\
f_n(u_{n-1}) &= 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\
f_n(u_{n-1}) &= f_n(u_{n-1}) - f_{n-1}(u_{n-1}) \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\
&= (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} (1 - u_{n-1}) < 0
\end{aligned}$$

car $1 < u_{n-1}$. Donc pour tout entier $n \geq 4$ on a : $f_n(u_{n-1}) < 0$

On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$

Et comme $f_n$ est strictement décroissante sur $[0, n]$ et que $u_n$ et $u_{n-1}$ ($\leq n-1$ ) en sont éléments alors $u_{n-1} > u_n$

La suite $u$ est donc décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente. Soit $L$ sa limite.

(c) On a $n \ln(u_n) = u_n$ donc $\ln(u_n) = u_n/n$ et $u_n = \exp(u_n/n)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} exp(u_n/n) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

(d) On a comme pour $u_n$

$$\begin{aligned} f_{n-1}(v_n) &= f_{n-1}(v_n) - f_n(v_n) \\ &= (v_n)^n e^{-v_n} - (v_n)^{n-1} e^{-v_n} \\ &= (v_n)^{n-1} e^{-v_n} (v_n - 1) > 0 \end{aligned}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$. Et comme $f_{n-1}$ est strictement croissante sur $[n-1, +\infty[$ et que $v_n$ ($\geq n \geq n-1$ ) et $v_{n-1}$en sont éléments alors $v_{n-1} < v_n$.

La suite $v$ est donc croissante

(e) On pose pour tout réel $x > 1$ : $g(x) = x - \ln(x)$. $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$
$$g(1) = 0$$

Comme $g$ est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$ alors $g$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1; +\infty[) = ]1, +\infty[$

Elle a donc une réciproque.

On a $(v_n)^n = e^{v_n}$ donc en élevant à la puissance $1/n$ : $v_n = e^{v_n/n}$

$$\begin{aligned} g(v_n/n) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) &= \frac{v_n}{n} - \ln\left(e^{v_n/n}\right) + \ln(n) \\ &= \frac{v_n}{n} - v + \ln(n) = \ln(n) \end{aligned}$$

Comme $v_n/n \in ]1, +\infty[$ ( car $v_n > n$ ) et que $\ln(n) \in ]1, +\infty[$ (car $n > e$ ) alors

$$g(v_n/n) = \ln(n) \Leftrightarrow \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

Or, comme $y = g(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \to +\infty$ quand $y \to +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(\ln(n)) = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} n g^{-1}(\ln(n)) = +\infty.}$$